SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ARITMÉTICA

Tema: CLASIFICACION DE LOS Z^+

Docente: Ramiro Díaz Vásquez

OBJETIVOS

1. Estudiar los números primos y sus propiedades.
2. Estudiar a los grupos de números PESI y PESI 2 a 2.
3. Estudiar el Teorema fundamental de la Aritmética y los divisores de un número.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

INTRODUCCIÓN

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS:

(Se usará como criterio la cantidad de ***divisores positivos***)

Números $\mathbb{Z}^+$

Números simples

Son aquellos que tienen a lo mucho 2 divisores

La unidad

Es el único número que posee 1 divisor.

Los números primos

Son aquellos que poseen exactamente 2 divisores. Se les llama también **primos absolutos**.

$2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \ldots$

Números compuestos

Son aquellos que tienen 3 o más divisores

$4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; \ldots$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS PRIMOS:

Propiedad 1:
Los números primos conforman un conjunto infinito.

$$2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; \ldots$$

Propiedad 2:
El único número par y primo al mismo tiempo es 2, todos los demás son impares.

Propiedad 3:
Los únicos números consecutivos y primos a la vez son 2 y 3.

Propiedad 4:
La única terna formada por 3 números impares consecutivos y primos a la vez son 3; 5 y 7.

Propiedad 5:
Todo número primo mayor que 2, es de la forma $\overset{\circ}{4} \pm 1$. Lo contrario no siempre se cumple.

Aplicación 1:

Determine cuántas ternas de números primos cumplen con la condición de que su suma es 32.

Resolución:

Piden: La cantidad de grupos de 3 números primos que satisfacen la condición.

Par Impar Impar Par

$$a + b + c = 32$$

a	b	c
2	7	23
2	11	19
2	13	17

Por lo tanto, hay 3 ternas que cumplen con la condición,

Respuesta: 3

NÚMEROS PESI:

Dos o más números enteros positivos se denominan números PESI (primos entre sí), cuando el único divisor común que tienen es la unidad; también se denominan *primos relativos* o *números coprimos*.

Ejemplos:

1. ¿Son PESI los números 16, 18 y 21?

Divisores de 16: 1; 2; 4; 8; 16
Divisores de 18: 1; 2; 3; 6; 9; 18
Divisores de 21: 1; 3; 7; 21

Divisores comunes: 1

16; 18 y 21 son PESI

2. ¿Son PESI los números 91, 35 y 63?

Divisores de 91: 1; 7; 13; 91
Divisores de 35: 1; 5; 7; 35
Divisores de 63: 1; 3; 7; 9; 21; 63

Divisores comunes: 1; 7

91; 35 y 63 no son PESI

NÚMEROS PESI 2 a 2:

Tres o más números enteros positivos son PESI 2 a 2, si al formar todas las parejas posibles con esos números, cada pareja resulta ser PESI.

Ejemplos:

1. ¿Son los números 34; 57 y 77 PESI 2 a 2?

Divisores de 34: 1; 2; 17; 34
Divisores de 57: 1; 3; 19; 57
Divisores de 77: 1; 7; 11; 77

Formando las posibles parejas:

34 y 57	34 y 77	57 y 77
Son PESI	Son PESI	Son PESI

Por tanto; 34; 57 y 77 son PESI 2 a 2

2. ¿Son los números 24; 39 y 61 PESI 2 a 2?

Divisores de 24: $1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24$

Divisores de 39: $1; 3; 13; 39$

Divisores de 61: $1; 61$

Formando las posibles parejas:

24 y 39	24 y 61	31 y 61
No son PESI	Son PESI	Son PESI

Por tanto; 24; 39 y 61 no son PESI 2 a 2

Aplicación 2:

Si se sabe que $\overline{1a}$; $\overline{2b}$ son PESI, determine el mayor valor de $a+b$.

Resolución:

Piden: El mayor valor de $a+b$

$\overline{1a}\ y\ \overline{2b} \longrightarrow (11;21)\ \ (11;23)\ \ \ldots\ldots\ (19;29)$

$a+b=18$

Respuesta: 18

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA:

Todo número entero positivo mayor que la unidad puede ser expresado, como la multiplicación indicada de sus divisores primos diferentes elevados a ciertos exponentes enteros positivos, dicha representación es única y se le denominada Descomposición Canónica (D.C.).

Ejemplos:

$175 = \underbrace{5^2 \times 7}_{D.C.}$ $\qquad 72 = \underbrace{2^3 \times 3^2}_{D.C.}$ $\qquad 91 = \underbrace{7 \times 13}_{D.C.}$

En general:

$$N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta} \quad \ldots\ldots\ (D.C.)$$

Donde: $a; b; c$: *Números primos* $\quad (\alpha; \beta; \theta) \in \mathbb{Z}^+$

Estudio de los divisores de un número:

Observemos los divisores de 12:

Primos — Impropio

$1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12$

Simples — Compuestos

a) Cantidad de divisores (CD):

Recordar que:

$Sea: \quad N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta} \ \ldots\ldots\ldots (D.C.)$

- Cantidad de divisores:

$$CD(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1)$$

- Cantidad de divisores propios:

$$CD(N) = CD(N) - 1$$

- Cantidad de divisores:

$$CD(N) = CD(N)_{Simples} + CD(N)_{Compuestos}$$

Tener en cuenta:

$$CD(N)_{Primos} = Cantidad\ de\ factores\ primos$$

Ejemplos:

- $144 = 2^4 \times 3^2 \longrightarrow CD(144) = (4 + 1)(2 + 1)$
  $CD(144) = 15$
- $2673 = 3^5 \times 11 \longrightarrow CD(2673) = (5 + 1)(11 + 1)$
  $CD(2673) = 72$
- $147 = 3 \times 7^2 \longrightarrow CD(147) = (1 + 1)(2 + 1)$
  $CD(147) = 6$
- $1024 = 2^{10} \longrightarrow CD(1024) = (10 + 1)$
  $CD(1024) = 11$

b) Suma de divisores (SD):

Recordar que:

$Sea: \quad N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots (D.C.)$

$$\mathrm{SD(N)} = \left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1}-1}{c-1}\right)$$

Aplicación 2: (examen UNI 2018 – I)

Halle la suma de las cifras del menor número entero positivo N, sabiendo que admite sólo dos divisores primos, el número de divisores simples y compuestos es 6 y la suma de ellos es 42

Resolución:

Pide: La suma de las cifras del número que cumple las condiciones.

$$N = a^{x} \times b^{y} \longrightarrow \underbrace{(x+1)}_{2}\underbrace{(y+1)}_{3} = 6$$

Entonces: $x = 1 \quad y = 2$

Además:

$$SD(N) = \left(\frac{a^{x+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{y+1}-1}{b-1}\right) = 42$$

$$SD(N) = \underbrace{\left(\frac{a^{2}-1}{a-1}\right)}_{6}\underbrace{\left(\frac{b^{3}-1}{b-1}\right)}_{7} = 42 \quad \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$N = 5^{1} \times 2^{2} = 20$$

Respuesta: 20

Tener en cuenta que:

- Suma de las inversas de los divisores:

$$SID(N) = \frac{N}{SD(N)}$$

- Producto de los divisores:

$$PD(N) = \sqrt{N^{CD(N)}}$$

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DEL FACTORIAL DE UN NÚMERO (forma práctica):

Determine la D.C. de 12!

Recuerda que:

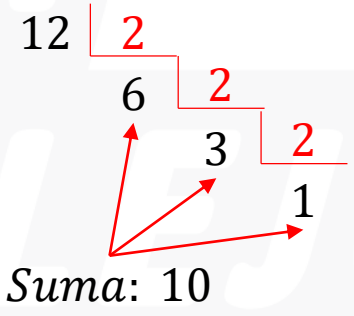
$$12! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$$

Se observa que el mayor número primo que puede aparecer en la D.C. es 11, por lo que podemos asegurar que la D.C. de un factorial tendrá como mayor factor primo a aquel que sea lo más cercano al número pero sin sobrepasarlo.

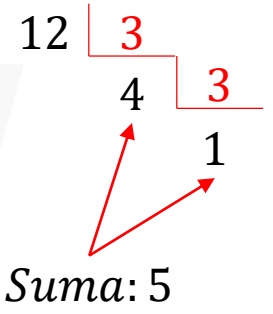
$$12! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e$$

Para hallar los exponentes:

Para el factor 2:



Para el factor 3:



Luego, si continuamos con los demás factores:

$$12! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^1 \ldots\ldots\ldots (D.C.)$$

INDICADOR DE UN NÚMERO:

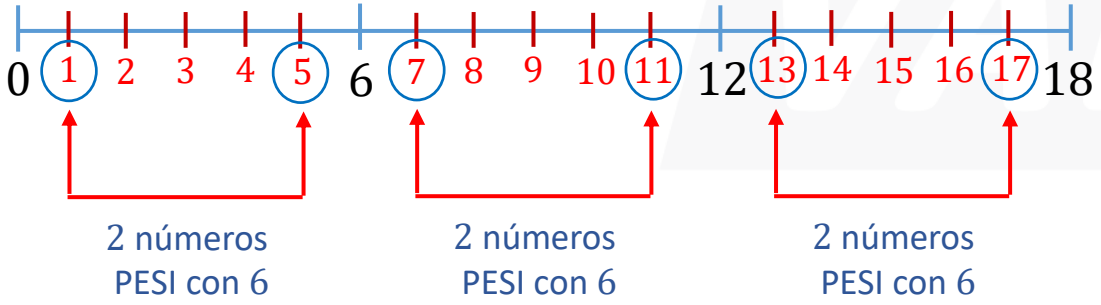
El indicador de un número N, nos dice cuántos números PESI con N existen entre dos múltiplos consecutivos de N.

En forma práctica el indicador de N , nos dice cuántos números menores o iguales a N, son PESI con N.

Notación: $\emptyset(N)$ o $\Psi(N)$

Ejemplo:

Halle el indicador de 6.



Entonces; $\emptyset(6) = 2$

De forma general:

$Sea: \quad N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \ \ldots\ldots\ldots (D.C.)$

- Para cualquier número:

$$\emptyset(N) = a^{\alpha-1} \times (a-1) \times b^{\beta-1} \times (b-1)$$

- Si P es un número primo:

$$\emptyset(P) = P - 1$$

$$\emptyset(P^{a}) = P^{a-1} \times (P-1)$$

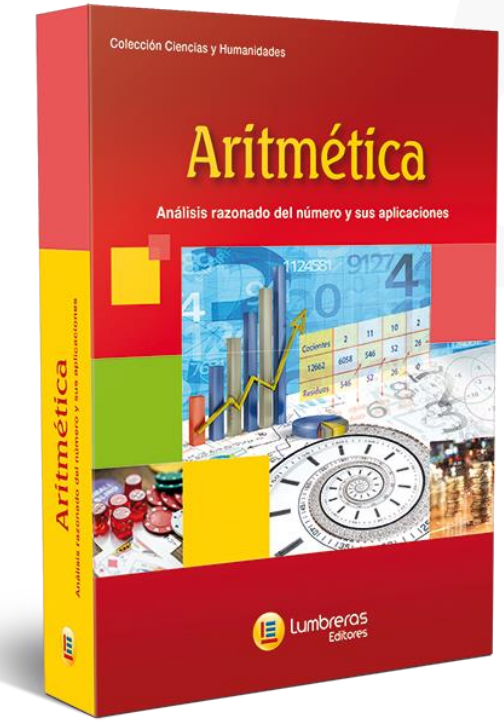
- Para dos valores A y B que son PESI:

$$\emptyset(A \times B) = \emptyset(A) \times \emptyset(B)$$

- Para la suma de todos los valores enteros positivos PESI con N pero menores que N:

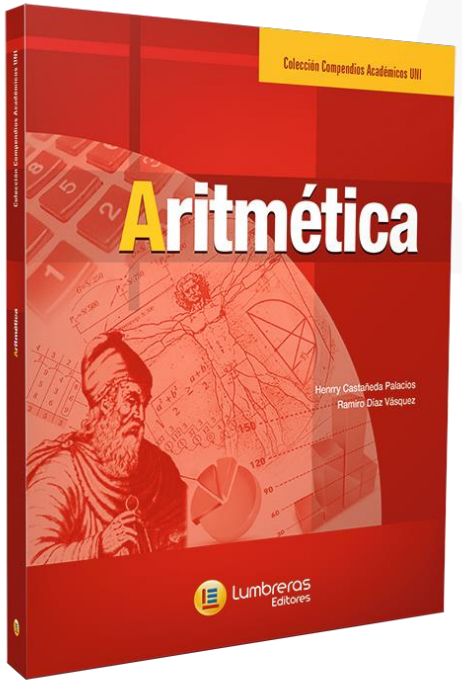
$$S = \frac{N \times \emptyset(N)}{2}$$

COLECCIÓN CIENCIAS Y HUMANIDADES



- Indispensable para profundizar el conocimiento de la aritmética.
- Su estructura presenta objetivos, introducción en cada tema, teoría amplia y desarrollada con ejemplos y aplicaciones, preguntas resueltas y preguntas propuestas tipo examen de admisión.

COLECCIÓN COMPENDIOS ACADÉMICOS UNI



- Estos libros le ayudarán a consolidar sus conocimientos con los temas más frecuentes en exámenes de admisión.
- Su estructura presenta teoría resumida y didáctica, problemas propuestos y sección de claves.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe